



Experimento Numérico em Tomografia de Tempo de Trânsito: Critérios de Avaliação dos Resultados da Inversão

Silvia Lorena Bejarano Bermúdez (IGEO/UFBA), Amin Bassrei (IGEO/CPGG/UFBA)

Copyright 2013, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

This paper was prepared for presentation at the 13th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, held in Rio de Janeiro, Brazil, August 26-29, 2013.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 13th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Resumo

This paper evaluated the quality of the solution of inverse problems in Exploration Geophysics, using the analysis of the resolution matrix and the Barbieri's method. A numerical experiment was done in seismic travelttime tomography using the singular values decomposition (SVD) method. The simulations were done with a synthetic model which has been parameterized into 2-D uniform blocks, considering the slowness constant in each block. These inversions were performed with different numbers of singular values, in every situation the number of singular value chosen was based on the associated condition number. Gaussian noise was incorporated to the travel times. To assess the quality of the inversion it was analyzed the behavior of the main diagonal of the data resolution matrix and the model resolution matrix for different number of singular values, providing a clear indicator of the success of the inversion. A second criterion used, was the concept of complementary vector introduced by Barbieri (1974); the process of inversion is evaluated by a pseudo-constant image, where one can analyze the regions where the inversion was not successful.

Introdução

A geofísica dedica seus esforços para obter a solução do problema inverso, mas em geral pouca atenção é dada respeito à crítica da solução. Em outras palavras, pouca ênfase é dada a uma análise quantitativa da solução do problema inverso. O objetivo principal do presente trabalho é apresentar diferentes metodologias para avaliar a qualidade da inversão em um problema inverso de tomografia de tempo de trânsito.

A tomografia sísmica é um problema inverso que permite estimar uma função a partir de uma integral de linha. Na tomografia de tempo de trânsito a incógnita do problema é a distribuição das vagarosidades, a qual é obtida a partir dos valores do parâmetro de dado, no caso, os tempos de trânsito entre fontes e receptores. Para a obtenção da matriz pseudo-inversa G^+ , ou, inversa de Moore-Penrose (Penrose, 1955) utilizamos o método da decomposição por valores singulares, ou SVD. Por definição SVD é uma

técnica de decomposição de matrizes que consiste em representar qualquer matriz $G_{M \times N}$ na forma $G = U \Sigma V^T$, onde $U_{M \times M}$ e $V_{N \times N}^T$ são matrizes ortogonais e $\Sigma_{M \times N}$ é a matriz diagonal que contém os valores singulares.

Em SVD tem-se que evitar os valores singulares pequenos, para não comprometer os resultados, pois estes valores agem com se fossem ruído. Portanto, se utilizou o critério dos valores singulares os quais foram dados pelo comportamento de decaimento dos valores singulares, o erro entre os vetores do parâmetro de dado observado e calculado e o erro entre os vetores do parâmetro de modelo verdadeiro e estimado, para assim fazer uma estimativa do número ou região ótima de valores singulares utilizados na inversão segundo Silva e Bassrei (2007). As simulações de inversão foram feitas com dados livres de ruído assim como com dados contaminados por ruído gaussiano.

A região de interesse foi discretizada em blocos 2D retangulares com dimensões conhecidas. A geometria de aquisição de dados é do tipo poço-poço, onde as fontes e os receptores estão distribuídos uniformemente nas laterais de uma malha de 30×20 , ou seja, a área de estudo está localizada entre os dois poços. A utilização de modelos sintéticos é necessária para que possamos determinar o erro, isto é, a diferença entre o vetor de parâmetros de modelo verdadeiro \mathbf{m}^{ver} (modelo sintético) e o vetor de parâmetros de modelo estimado \mathbf{m}^{est} . Este último vetor está associado ao vetor de parâmetros de dado calculado, representado por \mathbf{d}^{calc} . Num conjunto de dados reais não poderíamos fazer tal análise, já que não conhecemos o que realmente há em subsuperfície. Em outras palavras, para um caso real podemos determinar apenas o vetor de parâmetros de modelo estimado.

Usamos nesse trabalho dois critérios para a avaliação do problema inverso. O primeiro critério é a matriz de resolução, conforme definido em Jackson (1972). Quanto mais próxima for a matriz resolução da matriz identidade melhor será a qualidade da inversão. No segundo critério, consideramos que \mathbf{m}^{est} tem um vetor complementar $\mathbf{m}^{est,c}$ no qual as somas destes dois vetores é um terceiro vetor constante \mathbf{w} , temos então duas inversões para executar; a primeira a partir dos dados \mathbf{d}^{obs} e a matriz de coeficientes G determinamos \mathbf{m}^{est} , por meio do método de inversão SVD, logo; a segunda inversão é feita utilizando o vetor de parâmetros do dados complementar $\mathbf{d}^{obs,c}$ e novamente a matriz G , obtendo o vetor do parâmetros do modelo complementar $\mathbf{m}^{est,c}$, a soma deste dois vetores será o vetor constante \mathbf{w} se o problema inverso for exato. Esse critério foi sugerido por Barbieri (1974).

Tomografia Sísmica

A tomografia é uma técnica de reconstrução de imagem, a partir das somas dos valores das propriedades em determinadas direções Lo e Inderwinsen (1994). Se o dado utilizado é o tempo de percurso entre a fonte e o receptor, então se tem tomografia de tempo de trânsito que é uma abordagem cinemática. Caso o dado utilizado seja a forma da onda registrada então é tomografia de difração que é uma abordagem dinâmica. O presente trabalho utiliza tomografia de tempo de trânsito, que é assim chamada porque utiliza o tempo de trânsito entre fontes e receptores. O tempo de trânsito de um determinado raio por um percurso r é dado por: $t = \int_r s(x, z) dl$, onde t é o tempo de trânsito, r é a trajetória do raio ao longo do qual é realizada a integração, $s(x, z)$ é o vetor da vagarosidade do meio no ponto (x, z) (x e z , representam, respectivamente, as coordenadas horizontal e vertical) e dl é um elemento do percurso do raio. Pelo princípio de Fermat o caminho do raio será aquele para o qual a integral acima é um valor estacionário.

Temos que a equação para o tempo de trânsito é não-linear, ou seja, o raio ao percorrer meios homogêneos comporta-se como sendo reto, porém ao percorrer meios em que existem contrastes de velocidades o novo caminho descrito será curvo. Logo, para contornar o problema devemos realizar uma linearização, e utilizando a expansão em série de Taylor temos: $\Delta t_i = G \Delta s_i$, onde o vetor Δt_i corresponde às diferenças entre os tempos de trânsito calculados e os tempos de trânsito observados para o modelo; o vetor Δs_i corresponde às diferenças entre as vagarosidades do modelo inicial e as vagarosidades verdadeiras; a matriz G contém os elementos g_{ij} que correspondem às distâncias que o j -ésimo raio percorre no i -ésimo bloco, sendo $s_i = 1/v_i$ onde v_i é a velocidade em cada bloco.

As equações que descrevem a tomografia de tempo de trânsito, aproximada por um modelo linear, podem então ser formuladas como: $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$ ou utilizando uma notação mais específica: $\mathbf{t} = \mathbf{Gs}$, sendo, \mathbf{t} é o vetor de tempos de trânsito, que corresponde ao vetor de dados observados \mathbf{d} ; G é a matriz núcleo, ou *kernel* a qual descreve a geometria dos raios; \mathbf{s} é o vetor de vagarosidade (inverso da velocidade), que representa os parâmetros do modelo \mathbf{m} a serem determinados. O percurso do raio da fonte ao receptor é dado pelos elementos da matriz $G_{M \times N}$: onde M é o número total de raios = número de fontes \times número de receptores; N é o número de blocos na qual a área em estudo foi dividida.

O procedimento de inversão é executado pela decomposição por valores singulares, ou SVD. Os problemas inversos geofísicos lineares ou linearizados podem ser facilmente representados por um sistema linear de equações $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$. W. Menke (1984), por definição SVD é uma técnica de decomposição de matrizes que consiste em calcular a matriz inversa generalizada $G_{N \times M}^+$ da matriz $G_{M \times N}$. A matriz retangular $G_{M \times N}$, com posto k , pode ser decomposta na forma $G = U \Sigma V^T$, onde $U_{M \times M}$ e $V_{N \times N}^T$ são matrizes ortogonais e $\Sigma_{M \times N}$ é a matriz diagonal que contém os valores singulares (σ) de G , dispostos em ordem decrescente, ou seja, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ e a inversa generalizada expressa por $G^+ = V \Sigma^+ U^T$ Penrose (1955).

Seleção de Valores Singulares

Foram aplicados critérios para fazer uma seleção do número de valor singular a ser utilizados na inversão com SVD, isso devido ao fato que os valores singulares σ são calculados em forma decrescente, podendo chegar a valores tão pequenos que distorcem a solução do problema. Temos então:

Amplitude dos valores singulares. Os valores singulares (σ) de uma matriz são os valores das raízes quadradas dos autovalores do produto dessa matriz pela sua transposta, porém, agregando informação importante para a construção da matriz generalizada. O programa SVD permite obter esses valores em ordem decrescente, não obstante, a partir de certo valor, essa informação passa a ser considerado ruído e compromete a qualidade da inversão.

Adição de ruído. Foram realizadas simulações com dados contaminados por ruído gaussiano, introduzindo assim diferentes níveis de ruído para verificar o comportamento das inversões em função das vagarosidades. A adição de ruído se deu pela expressão: $d_j^* = d_j(1 + \alpha r_j)$, $j = 1, \dots, M$, onde d_j^* representa o j -ésimo elemento do vetor de parâmetros de dado contaminado com ruído, d_j representa o j -ésimo elemento do vetor de parâmetros de dado livre de ruído, α é a amplitude de ruído aplicado e r_j é o j -ésimo elemento de uma sequência quase aleatória de números. Pode-se calcular o erro entre o valor do dado contaminado com ruído e livres de ruído, por meio da seguinte equação:

$$\epsilon_{d^*} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (d_i^* - d_i^{obs})^2}. \quad (1)$$

Erro do dado. A partir da análise dos resultados podemos quantificar em termos de percentagem a diferença entre os tempos de trânsito observados e os calculados, esse erro é expresso a seguir:

$$\epsilon_d(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (t_i^{obs} - t_i^{calc})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M (t_i^{obs})^2}} \times 100, \quad (2)$$

onde M é o número de raios (número de fontes \times receptores), t_i^{obs} são os tempos de trânsito observados, e t_i^{calc} são os tempos de trânsito calculados.

Erro do modelo. É a diferença entre as vagarosidades verdadeiras e estimadas do modelo, em termos de percentagem esse erro é expresso como:

$$\epsilon_m(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (s_i^{ver} - s_i^{est})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (s_i^{ver})^2}} \times 100, \quad (3)$$

onde N é o número de blocos da malha, s_i^{ver} são as vagarosidades verdadeiras, e s_i^{est} são as vagarosidades estimadas.

Matrizes de Resolução

Conforme mencionado na introdução para efetuarmos uma análise quantitativa da solução do problema inverso

utilizamos o critério da matriz de resolução. Quanto mais próxima for a matriz de resolução da matriz identidade melhor será a qualidade da inversão Jackson (1972). Existem duas matrizes de resolução, a matriz de resolução do modelo é a matriz que caracteriza a relação entre os parâmetros do modelo estimado e os parâmetros do modelo verdadeiro (Menke, 1984). A matriz depende da estrutura do problema (geometria dos modelos e dos experimentos) e de alguma informação *a priori*. A principal utilidade da matriz resolução é fornecer uma medida da resolução obtida a partir dos dados e esta medida é baseada no grau em que a matriz de resolução é aproximada da matriz identidade (Jackson, 1972), $\mathbf{m}^{est} = G^+ \mathbf{d}^{obs} = G^+ [G \mathbf{m}^{ver}] = R_m \mathbf{m}^{ver}$, então, $R_m = G^+ G$.

Por seu turno, a matriz de resolução de dado é a matriz que caracteriza a relação entre os dados observados e os dados calculados com um modelo dado (Menke, 1984). Esta matriz descreve até que ponto as previsões correspondem aos dados. A matriz resolução de dados é determinada só pelos dados do kernel e uma informação *a priori* adicionada ao problema. $\mathbf{d}^{cal} = G \mathbf{m}^{est} = G[G^+ \mathbf{d}^{obs}] = R_d \mathbf{d}^{obs}$, então, $R_d = G G^+$.

Para realizar um estudo quantitativo do problema inverso foram feitas medições dos percentuais dos erros da diagonal principal da matriz de resolução de dados ε_{R_d} e o erro da diagonal principal da matriz de resolução de modelo ε_{R_m} , estes erros são expressos, respectivamente, como:

$$\varepsilon_{R_d} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1 - R_d)^2} \times 100, \quad (4)$$

e

$$\varepsilon_{R_m} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - R_m)^2} \times 100. \quad (5)$$

Método de Barbieri

O segundo método foi sugerido por Barbieri (1974) é utilizado em tomografia médica. Considere que \mathbf{m}^{est} , solução de um problema inverso, tem um vetor complementar $\mathbf{m}^{est,c}$, de modo que a soma destes dois vetores é um vetor constante dado por \mathbf{w} . Podemos trabalhar tanto com vetores ou com matrizes de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &\iff M, \\ \mathbf{m}^c &\iff M^c, \\ \mathbf{w} &\iff W, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{m} + \mathbf{m}^c = \mathbf{w}, \quad (6)$$

Neste último caso W é uma matriz constante, dado por $W = (w_0)$; $w_0 \geq \max(m_i)$. A partir de \mathbf{d}^{obs} e G determinamos \mathbf{m}^{est} por qualquer método de inversão, no caso deste trabalho será por SVD. Depois calculamos o vetor complementar dos parâmetros de dado observados usando a relação

$\mathbf{d}^{obs,c} = G \mathbf{w} - \mathbf{d}^{obs}$. Uma segunda inversão é efetuada obtendo agora o vetor complementar dos parâmetros de modelo $\mathbf{m}^{est,c}$. De posse dessas duas soluções, \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$, efetuamos então a soma:

$$\mathbf{w}^{est} = \mathbf{m}^{est} + \mathbf{m}^{est,c}. \quad (7)$$

Esse resultado será $\mathbf{w}^{est} = \mathbf{w}$, se o problema inverso for exato. Como geralmente isso não ocorre, podemos verificar em quais regiões do modelo a inversão teve êxito. Portanto, temos uma clara visão se o método de inversão utilizado foi efetivo ou não, seja no modelo como um todo ou em partes do modelo Basseri (2000). Se realizou um estudo quantitativo dos porcentagem dos erros entre o vetor constante \mathbf{w} e o vetor \mathbf{w}^{est} , pela seguinte equação:

$$\varepsilon_w = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w - w^{est})^2}. \quad (8)$$

Simulações em Tomografia de Tempos de Trânsito

O modelo sintético utilizado foi discretizado em 600 blocos, onde cada bloco tem um comprimento de 20 m e de altura 20 m, como resultado as dimensões totais da região de interesse são 600 m de extensão horizontal por 400 m de profundidade a partir da superfície. A principal característica é uma camada que tem uma velocidade de propagação de 4600 m/s. O modelo possui duas camadas horizontais respectivamente de cima para baixo com velocidades de 4000 m/s e 3400 m/s, a camada principal está incorporada em três camadas horizontais com velocidades 4300 m/s, 3400 m/s e 4300 m/s respectivamente, As velocidades são observadas na Figura 1(a), e as vagarosidades na Figura 1(b).

A geometria de aquisição de dados é do tipo poço-poço, onde as fontes e os receptores estão distribuídos uniformemente nas laterais de uma malha de 30×20, ou seja, a área de estudo está localizada entre os dois poços. Foram consideradas três situações na geometria de aquisição, primeiro como 20 fontes e 20 receptores uniformemente distribuídos em dois poços alinhados nas extremidades laterais da malha dessa forma, o número de raios é 400 então o número de equações é menor ao número de incógnitas correspondente a um problema subdeterminado, depois, foi analisado com 25 fontes e 24 receptores, portanto, o número de raios é 600, então o número de equações é igual ao número de incógnitas, isso significa que o problema é determinado posteriormente foi considerado o problema com 30 fontes e 30 receptores, como consequência o número de raios foi de 900, então, o número de equações é maior que o número de incógnitas, o qual correspondente a um problema sobredeterminado. Estas inversões foram realizadas em seis situações diferentes, onde em cada caso mudava a quantidade utilizada de valores singulares, portanto, em cada havia um determinado número de condição (NC). Esse indicador é expresso pela relação $NC = \sigma_{max} / \sigma_{min}$, onde σ_{max} é constante e σ_{min} é diferente em cada situação. Para a realização deste trabalho o NC é o mesmo em os três casos, obviamente, o número de valores singulares é diferente.

α	Subdeterminado ϵ_{d^*}	Determinado ϵ_{d^*}	Sobredeterminado ϵ_{d^*}
0,01	$2,189 \times 10^{-4}$	$2,208 \times 10^{-4}$	0,139
0,005	$1,094 \times 10^{-4}$	$1,103 \times 10^{-4}$	$6,989 \times 10^{-4}$
0,001	$2,189 \times 10^{-5}$	$2,208 \times 10^{-5}$	$1,397 \times 10^{-4}$
0,00	0,00	0,00	0,00

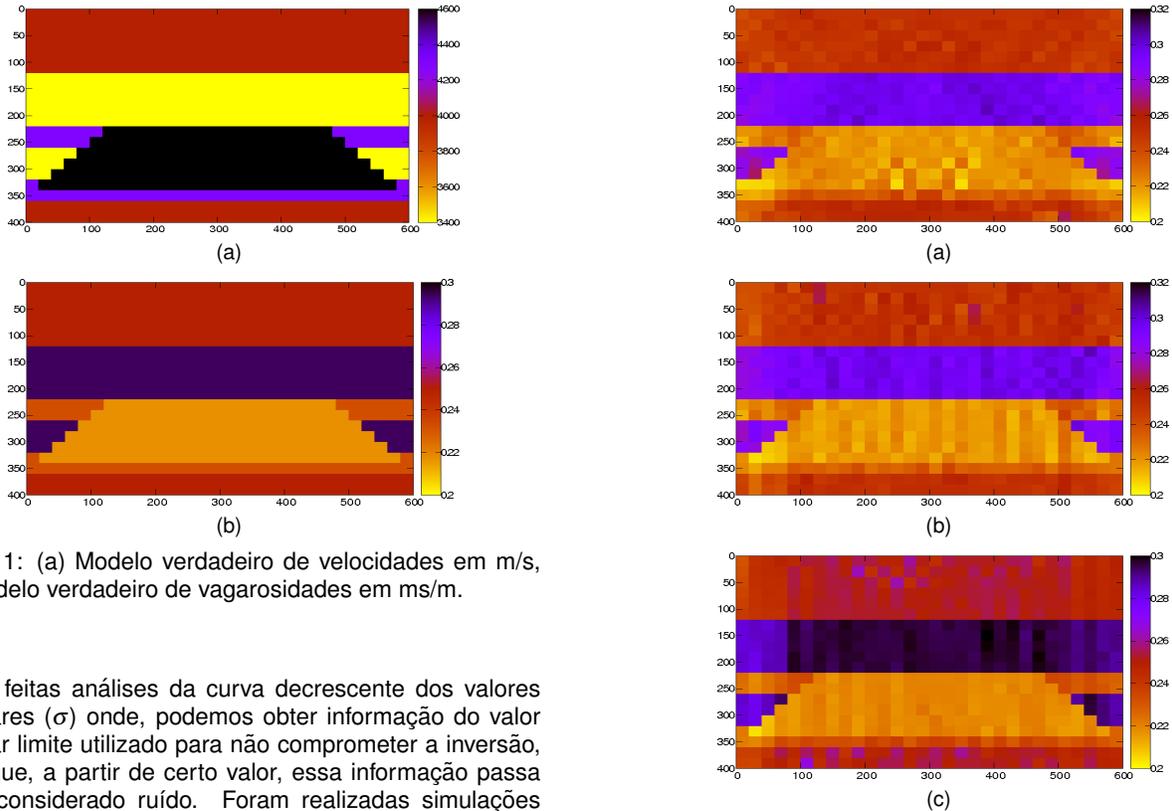
Tabela 1: Erro do dado observado em s , com e sem ruído

Figura 1: (a) Modelo verdadeiro de velocidades em m/s, (b) Modelo verdadeiro de vagarosidades em ms/m.

Foram feitas análises da curva decrescente dos valores singulares (σ) onde, podemos obter informação do valor singular limite utilizado para não comprometer a inversão, dado que, a partir de certo valor, essa informação passa a ser considerado ruído. Foram realizadas simulações com dados livres de ruído, assim como com dados contaminados por ruído gaussiano. A aplicação deste critério para o problema subdeterminado, determinado e sobredeterminado pode ser analisado na Tabela 1 onde se encontra representado o valor dos erros dos dados com ruído e livres de ruído dados pela equação (1), foram introduzidos nas simulações três diferentes níveis de ruído, de acordo os seguintes valores de α : 0,01; 0,005; 0,001 e 0,0 que é uma simulação sem ruído. A partir desta tabela podemos observar então como a medida que o nível de ruído α diminui os valores percentuais dos erros nos dados também.

Foram realizadas varias simulações para os diferentes números de valores singulares σ e para diferente nível de ruído, onde para cada um foi calculo o percentual do erro do dado $\epsilon_d(\%)$ equação (2) e o percentual do erro do modelo $\epsilon_m(\%)$ equação (3), cujos resultados estão condensados na Tabela 2. Nesta Tabela podemos observar que o valor do percentual do erro ϵ_d aumenta quando se aumenta o nível de ruído, o qual é coerente. Por sua vez o resultado do erro do modelo indicou que o valor de ϵ_m é estável até aproximadamente 397 no caso subdeterminado, 530 no caso determinado e 560 no caso sobredeterminado, um resultado da inversão pode ser observado na Figura 2, onde, é observado uma inversão

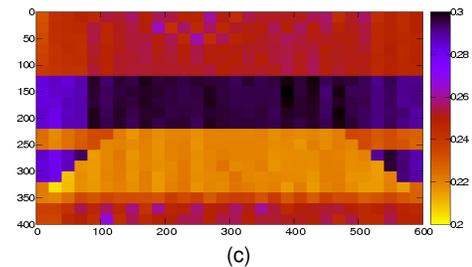


Figura 2: Modelos estimados com um valor de $\alpha = 0,005$. (a) Problema subdeterminado com 397 valores singulares. (b) Problema determinado com 530 valores singulares. (c) Problema sobredeterminado com 560 valores singulares.

feita com um nível de ruído gaussiano $\alpha = 0,005$ e com o mesmo $NC = 1 \times 10^3$, o qual corresponde a um valor singular de 397 para o problema subdeterminado, 530 para o problema determinado e 560 para o sobredeterminado, fazendo uma comparação das inversões observamos a particularidade que a inversão feita no problema sobredeterminado foi a mais sucedida. Por limitação de espaço mostramos as figuras só em este exemplo, mas, as simulações feitas com os outros valores deram como resultado que para obter uma inversão satisfatória o valor de ϵ_m tem que ser $< 10\%$.

Na Figura 3 é representada a matriz de resolução de dado e a matriz de resolução de modelo para um problema determinado com 530 valores singulares, observando como a diagonal principal das duas matrizes vão se aproximando de um. Os resultados das percentuais dos erros da diagonal principal da matriz de resolução de dados ϵ_{R_d} dado pela equação (4) e o erro da diagonal

α	Subdeterminado			Determinado			Sobredeterminado		
	σ	$\varepsilon_m(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$	σ	$\varepsilon_m(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$	σ	$\varepsilon_m(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$
0,01	367	4,224	0,438	429	4,062	$7,836 \times 10^{-2}$	486	3,913	$9,637 \times 10^{-2}$
	397	7,418	$1,539 \times 10^{-2}$	530	$1,413 \times 10^2$	$5,195 \times 10^{-2}$	560	$1,000 \times 10^2$	$8,477 \times 10^{-2}$
	398	7,415	$1,533 \times 10^{-2}$	543	$8,379 \times 10^2$	$4,207 \times 10^{-2}$	562	$1,009 \times 10^2$	$8,475 \times 10^{-2}$
	399	$1,650 \times 10^1$	$8,810 \times 10^{-3}$	549	$1,451 \times 10^3$	$3,984 \times 10^{-2}$	565	$1,044 \times 10^3$	$8,466 \times 10^{-2}$
	400	$4,859 \times 10^2$	$5,326 \times 10^{-3}$	560	$3,429 \times 10^5$	$3,374 \times 10^{-2}$	575	$7,390 \times 10^5$	$8,183 \times 10^{-2}$
			577	$1,240 \times 10^7$	$2,287 \times 10^{-2}$	595	$7,345 \times 10^6$	$7,732 \times 10^{-2}$	
0,005	367	3,230	$2,200 \times 10^{-2}$	429	3,217	$4,242 \times 10^{-2}$	486	2,950	$4,939 \times 10^{-2}$
	397	4,220	$7,766 \times 10^{-3}$	530	7,358	$2,594 \times 10^{-2}$	560	5,166	$4,238 \times 10^{-2}$
	398	4,209	$7,697 \times 10^{-3}$	543	$4,192 \times 10^2$	$2,103 \times 10^{-2}$	562	5,208	$4,237 \times 10^{-2}$
	399	8,487	$4,405 \times 10^{-3}$	549	$7,259 \times 10^3$	$1,992 \times 10^{-2}$	565	$5,223 \times 10^2$	$4,233 \times 10^{-2}$
	400	$2,430 \times 10^2$	$2,663 \times 10^{-3}$	560	$1,714 \times 10^5$	$1,687 \times 10^{-2}$	575	$3,696 \times 10^5$	$4,091 \times 10^{-2}$
			577	$6,203 \times 10^6$	$1,144 \times 10^{-2}$	595	$3,672 \times 10^6$	$3,866 \times 10^{-2}$	
0,001	367	2,839	$1,100 \times 10^{-2}$	429	2,896	$2,233 \times 10^{-2}$	486	2,566	$1,836 \times 10^{-2}$
	397	2,428	$1,773 \times 10^{-3}$	530	2,195	$5,136 \times 10^{-3}$	560	1,787	$8,478 \times 10^{-3}$
	398	2,406	$1,588 \times 10^{-3}$	543	8,532	$4,207 \times 10^{-3}$	562	1,778	$8,475 \times 10^{-3}$
	399	2,820	$8,815 \times 10^{-4}$	549	$1,452 \times 10^3$	$3,985 \times 10^{-3}$	565	$1,044 \times 10^2$	$8,466 \times 10^{-3}$
	400	$4,865 \times 10^1$	$5,327 \times 10^{-4}$	560	$3,429 \times 10^4$	$3,375 \times 10^{-3}$	575	$7,390 \times 10^4$	$8,183 \times 10^{-3}$
			577	$1,240 \times 10^6$	$2,288 \times 10^{-3}$	595	$7,345 \times 10^5$	$7,732 \times 10^{-3}$	
0,0	367	2,822	$1,059 \times 10^{-2}$	429	2,882	0,022	486	2,549	$1,675 \times 10^{-2}$
	397	2,324	$7,311 \times 10^{-4}$	530	1,661	$3,840 \times 10^{-4}$	560	1,489	$4,479 \times 10^{-4}$
	398	2,300	$7,349 \times 10^{-5}$	543	1,621	$1,070 \times 10^{-5}$	562	1,471	$1,978 \times 10^{-5}$
	399	2,299	$5,354 \times 10^{-7}$	549	1,423	$8,655 \times 10^{-7}$	565	1,257	$1,094 \times 10^{-6}$
	400	2,299	$4,801 \times 10^{-8}$	560	0,436	$5,527 \times 10^{-9}$	575	0,248	$5,111 \times 10^{-9}$
			577	$4,828 \times 10^{-2}$	$2,093 \times 10^{-7}$	595	$4,505 \times 10^{-3}$	$1,176 \times 10^{-7}$	

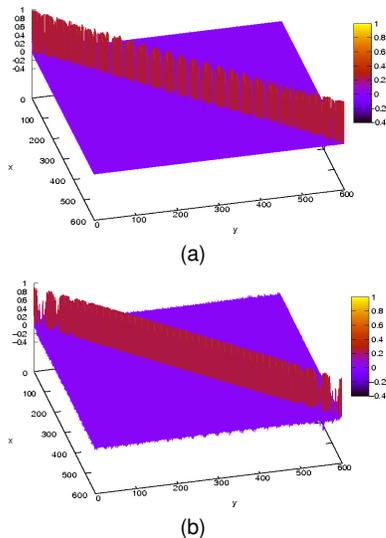
Tabela 2: Erro do modelo ε_m , erro do dado ε_d para o problema subdeterminado, determinado e sobredeterminado.

Figura 3: (a) Matriz de resolução de dados. (b) Matriz de resolução de modelo, para um problema determinado com 530 Valores Singulares.

principal da matriz de resolução de modelo ε_{R_m} dado pela equação (5), são mostrados na Tabela 3. Temos então que a medida que é utilizado um valor singular ótimo a diagonal principal da matriz de resolução de dado e de modelo vão se aproximando de um, o qual, da como resultado uma inversão sucedida. Tomando em consideração que o NC representa quão estável é a inversão podemos dizer que o valor adequado do NC se encontra nas vizinhanças

de 1×10^4 , nos três casos. Fazendo uma comparação dos erros das matrizes ε_{R_d} e ε_{R_m} na tabela é possível verificar que a matriz de resolução de dado no problema subdeterminado é mais próxima de um que no problema determinado e sobredeterminado, mesmo utilizando igual número de condição, situação contrária acontece com a matriz de resolução de modelo, que é mais próxima de um no problema sobredeterminado.

Na Tabela 3 estão representados também os valores do erro ε_w dado pela equação (8). Na tabela pode ser observado como os valores do erro diminui com ou aumento do número de condição, como resultado a soma dos vetores \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$ vão se aproximando cada vez mais ao valor constante w , na inversão efetuada foi tomado o valor constante $w = 0,0002$ s/m. Comparando os resultados das inversões por médio dos critérios das matrizes de resolução e o método de Barbieri, temos que nos dois casos podemos fazer uma adequada avaliação da inversão efetuada. Estes resultados podem ser visualmente mais detalhados nos gráficos, mas por limitações de espaço mostramos apenas os resultados dos erros percentuais e uma representação grafica na Figura 4, onde pode-se observar que a soma entre o \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$ da um vetor constante \mathbf{w} , para um problema determinado, indicando as regiões onde a inversão não foi bem sucedida.

Conclusões

A presença de pequenos valores singulares na inversão gera um crescimento anômalo em os critérios de erro

Subdeterminado				Determinado				Sobredeterminado			
α	$\epsilon_{Rd}(\%)$	$\epsilon_{Rm}(\%)$	ϵ_w	α	$\epsilon_{Rd}(\%)$	$\epsilon_{Rm}(\%)$	ϵ_w	α	$\epsilon_{Rd}(\%)$	$\epsilon_{Rm}(\%)$	ϵ_w
367	58,712	72,830	$1,376 \times 10^{-10}$	429	33,329	33,526	$7,673 \times 10^{-12}$	486	40,621	25,124	$3,981 \times 10^{-12}$
397	15,071	42,871	$6,759 \times 10^{-12}$	530	18,964	19,665	$1,636 \times 10^{-14}$	560	35,441	10,874	$6,096 \times 10^{-17}$
398	3,420	38,763	$3,977 \times 10^{-13}$	543	16,878	17,993	$8,535 \times 10^{-18}$	562	35,347	10,519	$2,389 \times 10^{-19}$
399	3,110	38,619	$5,090 \times 10^{-16}$	549	15,722	16,887	$3,349 \times 10^{-20}$	565	35,116	10,198	$1,475 \times 10^{-20}$
400	2,500	38,325	$7,456 \times 10^{-17}$	560	12,398	15,031	$4,871 \times 10^{-23}$	575	34,166	8,836	$6,300 \times 10^{-24}$
				577	7,785	13,877	$1,498 \times 10^{-21}$	595	32,528	6,780	$8,720 \times 10^{-22}$

Tabela 3: Erro da matriz de resolução de dado ϵ_{R_d} , erro da matriz de resolução de modelo ϵ_{R_m} e erro da seção pseudo-constante ϵ_w .

do parâmetro do modelo e erro do parâmetro do dado, como também nos erro da diagonal da matriz de resolução de modelo, a matriz de resolução de dado e o erro do vetor constante \mathbf{w} , portanto, é utilizado alguns critérios para analisar em quais região o número de valor singular é ótimo. Para o caso subdeterminado se estimou um valor singular aproximado de $\sigma = 397$, para o problema determinado um valor singular aproximado de $\sigma = 530$ e para o problema sobredeterminado $\sigma = 560$. A utilização de diferentes níveis de ruído revelou que para $\alpha > 0,01$ a inversão não é ótima, para valores menores de $\alpha < 0,01$, proporciona uma validade devido ao fato que os tomogramas gerados são semelhantes ao tomograma verdadeiro. Com os critérios da matriz de resolução de dado e a matriz de resolução de modelo podemos verificar as regiões onde a inversão não teve sucesso e como ela melhora com a utilização de um número ótimo de valor singular, representado nos valores percentuais. Da mesma forma podemos verificar a qualidade da inversão por meio do método de Barbieri, onde, conforme é utilizado um número ótimo de valor singular a soma dos vetores \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$ se aproxima de um valor constante w , e como resultado pode-se observar e avaliar a qualidade da inversão feita, o qual é confirmado com os valores percentuais.

Referências

- Barbieri, M., 1974, A criterion to evaluate three dimensional reconstructions from projections of unknown structures, *Journal of Theoretical Biology*, 48: 451-467.
- Bassrei, A., 2000, Novel approaches for the solution and solution evaluation of linear and non-linear inverse problems in geophysics. *Boletim SBMAC*, Vol. 4.
- Jackson, D.D., 1972, Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 28: 97-109.
- Silva, J.N.P. e Bassrei, A., 2007, Critérios de seleção de Valores Singulares em Problemas Inversos Lineares: uma Aplicação em Tomografia de Tempos de Trânsito. *Sitientibus Série Ciências Físicas*, 03: 32-48.
- Lo, T.-w. e Inderwiesen, P.L. 1994, *Fundamentals of Seismic Tomography*. Geophysical Monograph Series. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists.
- Menke, W. 1984, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Orlando: Academic Press.

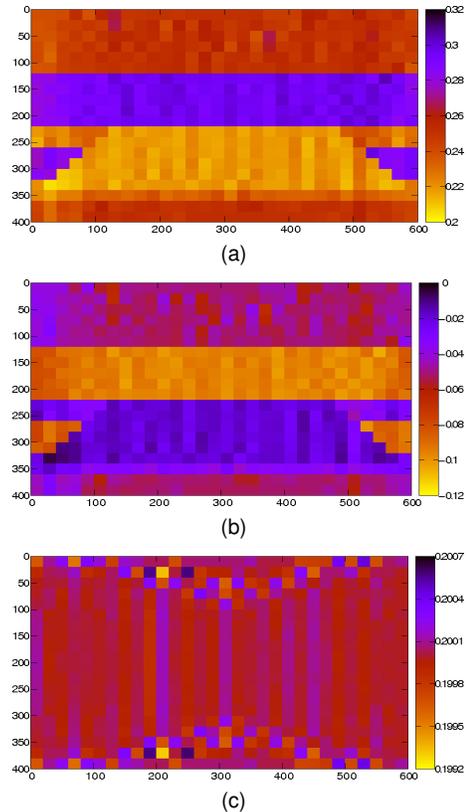


Figura 4: (a) Modelo estimado, (b) Modelo estimado complementar, (c) Vetor constante \mathbf{w} .

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (INCT-Geofísica de Petróleo) e à FINEP (Rede CT-PETRO em Geofísica de Exploração) pelo financiamento e apoio à pesquisa. Silvia Bermúdez agradece ao CNPq pela bolsa de doutorado e Amin Bassrei agradece ao CNPq pela bolsa de produtividade de pesquisa.